Induksioni matematik

Me anë të induksionit matematik vërtetohet saktësia e shumë pohimeve, të cilat shprehen me anë të numrave natyrorë.

Le të jetë $P(n)$ - një polinom në bashkësinë e numrave natyrorë ($\mathbb{N}$). Themi se pohimi i tillë vlen për çdo numër natyror ($\forall n \in \mathbb{N}$), nëse ai plotëson këto kushte:

1° Provohet vërtetësia e pohimit $P(n)$, për $n=1$, $n=2$, $n=3, \dots$

2° Supozohet se vlen për $n=k$

3° Vërtetohet se vlen për $n=k+1$.

Shembull: Me anë të induksionit matematik, të vërtetohen identitet:

a) $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Zgjidhje:

1° Për $n=1$: $1=\frac{1(1+1)}{2}$

$1=1 \rightarrow P(1)$ i saktë

Për $n=2$: $1+2=\frac{2(2+1)}{2}$

$3=3 \rightarrow P(2)$ i saktë

2° Supozojmë se vlen për $n=k$, d.m.th.:

$$1+2+3+\dots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

3° Vërtetojmë se vlen për $n=k+1$, atëherë

$$\underbrace{1+2+3+\dots+k}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \rightarrow P(n) \text{ i saktë për } n=k+1.$$

Meqë plotësohen kushtet 1°-3°, atëherë $P(n)$ i saktë $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$

Zgjidhje:

1° Për $n=1$: $1=1^2$

$1=1 \to P(1)$ i saktë

Për $n=2$: $1+3=2^2$

$4=4 \to P(2)$ i sakt

2° Supozojmë se vlen për $n=k$, d.m.th.:

$$1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$$

3° Vërtetojmë se vlen për $n=k+1$, atëherë

$$\underbrace{1+3+5+\dots+(2k-1)}_{}+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$$

$$k^2+2k+2-1=(k+1)^2$$

$$k^2+2k+1=k^2+2k+1 \to P(n) \text{ i saktë}$$

për $n=k+1$.

Megë plotësohen kushtet $1^\circ-3^\circ$, atëherë $P(n)$ i saktë $\forall n\in\mathbb{N}$.

c) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Zgjidhje:

1° Për $n=1$:

$$1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$$

$$1=\frac{6}{6}$$

$1=1 \rightarrow P(1)$ i saktë

Për $n=2$:

$$1^2+2^2=\frac{2(2+1)(2\cdot2+1)}{6}$$

$$5=\frac{30}{6}$$

$5=5 \rightarrow P(2)$ i saktë

2° Supozojmë se vlen për $n=k$, atëherë:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

3° Vërtetojmë se vlen për $n=k+1$, atëherë:

$$\underbrace{1^2+2^2+3^2+\dots+k^2}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+3k+4k+6)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

Meqë plotësohen kushtet $1^\circ-3^\circ$, atëherë $P(n)$ i saktë për $\forall n\in\mathbb{N}$.

d) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

1° Për $n=1$:

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot 1+1}$$

$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\rightarrow P(1)$ i saktë

Për $n=2$:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{2}{2\cdot 2+1}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{2}{5}$$

$\frac{\cancel{6}\,2}{\cancel{15}\,5}=\frac{2}{5}\rightarrow P(2)$ i saktë

2° Supozojmë se vlen për $n=k$, d.m.th.:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

3° Vërtetojmë se vlen për $n=k+1$, atëherë:

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}}+\frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

$$\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

$$\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

$$\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

$2k^2+3k+1=2k^2+2k+k+1=$
$=2k(k+1)+(k+1)=(k+1)(2k+1)$

$$\frac{(k+1)\cancel{(2k+1)}}{\cancel{(2k+1)}(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

$\frac{k+1}{2k+3}=\frac{k+1}{2k+3}\rightarrow P(n)$ i saktë për $n=k+1$.

Meqë plotësohen kushtet 1°–3°, atëherë $P(n)$ i saktë për $\forall n\in\mathbb{N}$.

e) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$

1° Për $n=1$:

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{4}-\frac{2\cdot 1+3}{4\cdot 3^1}$$

$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\rightarrow P(1)$ i saktë

Për $n=2$:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}=\frac{3}{4}-\frac{2\cdot 2+3}{4\cdot 3^2}$$

$\frac{\cancel{4}}{3}=\frac{5}{3}\rightarrow P(2)$ i saktë

2° Supozojmë se vlen për $n=k$, d.m.th.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{k}{3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2\cdot k+3}{4\cdot 3^k}$$

3° Vërtetojmë se vlen për $n=k+1$, atëherë

$$\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{k}{3^k}}+\frac{k+1}{3^{k+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2(k+1)+3}{4\cdot 3^{k+1}}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4\cdot 3^k}+\frac{k+1}{3^{k+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2k+2+3}{4\cdot 3^{k+1}}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4\cdot 3^k}+\frac{k+1}{3^k\cdot 3}=\frac{3}{4}-\frac{2k+5}{4\cdot 3^k\cdot 3}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{3(2k+3)-4(k+1)}{12\cdot 3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2k+5}{12\cdot 3^k}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{6k+9-4k-4}{12\cdot 3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2k+5}{12\cdot 3^k}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{2k+5}{12\cdot 3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2k+5}{12\cdot 3^k}$$ – $P(n)$ i saktë për $n=k+1$

Meqë plotësohen kushtet 1°–3° atëherë $P(n)$ i saktë për $\forall n\in\mathbb{N}$.

f) $2^3+4^3+6^3+\dots+(2n)^3=2n^2(n+1)^2$

1° Për $n=1$:

$2^3=2\cdot 1^2(1+1)^2$

$8=8$

Për $n=2$:

$2^3+4^3=2\cdot 2^2(2+1)^2$

$72=72$

2° Supozojmë se vlen për $n=k$, d.m.th.:

$2^3+4^3+6^3+\dots+(2k)^3=2k^2(k+1)^2$

3° Vërtetojmë se vlen për $n=k+1$, atëherë:

$$\underbrace{2^3+4^3+6^3+\dots+(2k)^3}+(2(k+1))^3=2(k+1)^2(k+2)^2$$

$$2k^2(k+1)^2+(2(k+1))^3=2(k+1)^2(k+2)^2$$

$$2k^2(k+1)^2+2^3(k+1)^3=2(k+1)^2(k+2)^2$$

$$2(k+1)^2(k^2+2^2(k+1))=2(k+1)^2(k+2)^2$$

$$2(k+1)^2(k^2+4k+4)=2(k+1)^2(k+2)^2$$

$$2(k+1)^2(k+2)^2=2(k+1)^2(k+2)^2$$

$k^2+4k+4=k^2+2\cdot k\cdot 2+2^2=$

$=(k+2)^2$

9) $1^2-2^2+3^2-\dots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

1° Për $n=1$:

$$1^2=(-1)^{1-1}\frac{1(1+1)}{2}$$

$$1=1$$

Për $n=2$:

$$1^2-2^2=(-1)^{2-1}\frac{2(2+1)}{2}$$

$$-3=-3$$

2° Supozojmë se vlen për $n=k$, d.m.th.:

$$1^2-2^2+3^2-\dots+(-1)^{k-1}\cdot k^2=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$$

3° Vërtetojmë se vlen për $n=k+1$, atëherë:

$$\underbrace{1^2-2^2+3^2-\dots+(-1)^{k-1}\cdot k^2}+(-1)^{k+1-1}\cdot(k+1)^2=(-1)^{k+1-1}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$(-1)^k\cdot(-1)^{-1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$(-1)^k(k+1)\left[(-1)^{-1}\cdot\frac{k}{2}+(k+1)\right]=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$(-1)^k(k+1)\left(-1\cdot\frac{k}{2}+k+1\right)=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$(-1)^k(k+1)\frac{-k+2k+2}{2}=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$