PARIMI I INDUKSIONIT MATEMATIK

Induksioni matematik si metodë vërtetimi në një teori matematike të caktuar lidhet ngushtësisht me konceptin e numrit natyror, i cili është në themel të çdo teorie matematike. Kjo metodë vërtetimi përdoret kur kërkohet të vërtetohen pohime të trajtës $\forall n \in \mathbf{N}_m$, $P(n)$ dhe mbështetet në *parimin e induksionit matematik* që ka formulimin e mëposhtëm:

Le të jetë $P(n)$ një predikat mbi bashkësinë $\mathrm{N}_m=\{ n \in \mathrm{N} \mid n \geq m \}$, ku m është një numër natyror i fiksuar, i çfarëdoshëm (përgjithësisht m është 1). Në qoftë se është i vërtetë pohimi

$$P(m) \wedge [\forall k \in \mathrm{N}_m,\ P(k) \Rightarrow P(k+1)],$$

atëherë është i vërtetë edhe pohimi $\forall n \in \mathrm{N}_m$, $P(n)$.

Në fakt pohimi i mësipërm është një *aksiomë*, por përdoret termi *parim* për arsye historike.

Le të ndalemi pak në kuptimin intuitiv të parimit të induksionit matematik. Të thuash që pohimi $P(m) \wedge [\forall k \in \mathbf{N}_m,\ P(k) \Rightarrow P(k+1)]$ është i vërtetë do të thotë para së gjithash që numri natyror m ka vetinë P, pastaj që edhe numri natyror $k+1$ ka vetinë P, kur atë veti e gëzon numri natyror $k \geq m$. Në këto kushte, aksioma pohon që çdo numër natyror $n \geq m$ ka vetinë P. Intuitivisht situata duket mjaft e qartë: numri natyror m ka vetinë P, prandaj edhe pasuesi i tij $m+1$ ka vetinë P, pastaj pasuesi i pasuesit të tij $m+2$ ka vetinë P, e kështu me radhë. Është pikërisht kjo "kështu me radhë" që është formalizuar nga parimi i induksionit.

Formalisht një vërtetim që përdor parimin e induksionit paraqitet në këtë mënyrë:

Formula *F(n)* e cila varet nga numri natyror *n* është i vërtetë për çdo numër natyror nëse

I.Është e vërtetë për $n=1$ d.m.th. është i vërtetë $F(1)$.

II. Supozohet vërtetësia për n=k, pra F(k)

III. Vërtetohet vërtetësia e piohimit për n=k+1, pra F(k+1).

Shembull 1. Të vërtetohet se shuma e n numrave të parë natyrorë tek është n^2.

Vërtetim. Numrat e parë natyrorë tek janë 1, 3, 5, ..., $(2n-1)$, për $n=1$, 2, 3, ... Kështu që shuma e n numrave të parë natyrorë tek ka pamjen $1+3+5+...+(2n-1)$. Prandaj kërkohet të vërtetohet me fjalë të tjera pohimi

$$\forall n \geq 1,\ 1+3+5+...+(2n-1) = n^2 .$$

E vërtetojmë atë sipas parimit të induksionit, ku predikati $P(n)$ është barazimi $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$.

Për n=1, duket menjëherë që $P(1)$ është i vërtetë:

$1=1^2$. (hapi bazë)

Pranojmë tani që për $k \geq 1$, $P(k)$ është i vërtetë, ndryshe është i vërtetë barazimi $1+3+5+...+(2k-1) = k^2$. Të vërtetojmë që prej këndej del i vërtetë edhe $P(k+1)$, d. m. th. barazimi $1+3+5+...+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$.

Me të vërtetë, kemi

$1+3+5+...+(2(k+1)-1)=1+3+5+...+(2k+1)=$

$=1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$.

Kjo tregon që $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ (hapi i induksionit).

Sipas parimit të induksionit kemi $P(n) = n^2$ për çdo $n \geq 1$.

Shembull 2. Të vërtetohet barazimi:

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \ \forall n \in \mathbf{N}_1. \qquad (\alpha)$$

Ky barazim është një predikat $P(n)$ mbi $\mathbf{N}_1$. E vërtetojmë atë sipas parimit të induksionit matematik.

Hapi I. $P(1)$ është i vërtetë, sepse:

$$1^2=\frac{1\cdot 2\cdot(2\cdot 1+1)}{6} \Leftrightarrow 1=1.$$

Hapi II. E zëmë se $P(k)$ është i vërtetë, d.m.th. është i vërtetë barazimi:

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Mbasi i shtojmë të dy anëve të tij $(k+1)^2$, marrim:

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2.$$

Shndërrojmë anën e djathtë të këtij barazimi në këtë mënyrë:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k+1}{6}(2k^2+7k+6)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Për rrjedhojë:

$$1^2+2^2+3^2+...+(k+1)^2=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},$$

gjë që tregon se $P(k+1)$ është një pohim i vërtetë. Ky arsyetim është i vërtetë për çdo $k \geq 1$, prandaj, sipas parimit të induksionit, pohimi (α) është i vërtetë.

Shembuj:

Me induksion matematikor tregoni se janë të vërteta formulat

1. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

Zgjidhje:

I.Për *n=1* është e vërtetë $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

d.m.th. është e vërtetë *F(1).*

II.Supozojmë se vlen $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$, d.m.th *F(k)* .

Tregojmë se vlenë *F(k+1)* . Nëse *F(k)* i shtojmë anë për anë

$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, marrim

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$=\frac{k+1}{2k+3}$, vërejmë që është e vertetë edhe *F(k+1)* .

2.$1+2+2^2+2^3+...+2^{n-1}=2^n-1$; *F(n)*

Zgjidhje : I. Për *n=1* kemi $1=2^1-1=1$; *F(1)*

II.Supozojmë se vlen $1+2+2^2+2^3+...+2^{k-1}=2^k-1$; *F(k).* Tregojmë se vlen *F(k+1)* . Nëse supozimit i shtojmë anë për anë *2^k* , fitojmë

$1+2+2^2+2^3+...+2^{k-1}+2^k=2^k-1+2^k=2\cdot 2^k-1=2^{k+1}-1$; *F(k+1).*

3. $3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1}\equiv 0$ (mod 19).

Zgjidhje: Nëse $f(n)=3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1}$, atëherë kemi

$$f(1)=3^5+5\cdot 2^4=323\equiv 0 \pmod{19}.$$

Tregojmë implikacionin $f(k)\equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow f(k+1)\equiv 0 \pmod{19}$.

Meqë
$$\begin{aligned} f(k+1)&=3^{3(k+1)+2}+5\cdot 2^{3(k+1)+1}=3^3\cdot 3^{3k+2}+5\cdot 2^{3k+1}\cdot 2^3\\ &=27(3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1})-19\cdot 5\cdot 2^{3k+1}\\ &=27f(k)-95\cdot 2^{3k+1}\end{aligned}$$

Tani $f(k+1)\equiv 0$ (mod 19) sepse anëtari $27\cdot f(k)$ plotëpjesëtohet me 19 sipas supozimit , kurse është e qartë se anëtari $95\cdot 2^{3k+1}$ plotëpjesëtohet me 19 , pra implikacioni është i vërtetë.

Me induksion matematikor tregoni vertetesine e formulave

4 . $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

5 . $1+2+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1$ **.**

6 . $3^{2n}-1\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 8)$

7 . $2^n>n^2$ p[r $n\geq 5$

8 . $2^{2n+1}-9n^2+3n-2\equiv 0(\mathrm{mod}\, 54)$ **.**

9. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + ... + \sin nx = \dfrac{\sin \dfrac{n+1}{2} x \sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}$.

10. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2} \right]^2$.